ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÁ NAM

VỀ HỆ SỐ NHỊ THỨC, HỆ SỐ ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÁ NAM

VỀ HỆ SỐ NHỊ THỨC, HỆ SỐ ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 84 60 113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Trần Xuân Quý

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	=	Tập hợp các số tự nhiên
	=	$\{0, 1, 2, 3...\}$
$\mathbb{N}^*$	=	Tập hợp các số tự nhiên khác 0
	=	$\{1, 2, 3...\}$
$\mathbb{Z}$	=	Tập hợp các số nguyên
	=	$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$
R	=	Tập hợp các số thực
$a\,\vert b$	:	a là ước của b
$a \not\vert b$	:	a không là ước của b
$[x]$	=	phần nguyên của số thực x
$a \equiv b \pmod{m}$	:	a đồng dư b theo mô đun m
$\vert S\vert$	=	số phần tử của tập hợp S
$C_n^r = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)$	=	số tổ hợp chập r của tập n phần tử
	=	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
$A_n^r = P_n^r$	=	số chỉnh hợp chập r của n phần tử
	=	$\frac{n!}{(n-r)!}$
P_n	=	số hoán vị của tập n phần tử
	=	$n!$
Q_n	=	số hoán vị vòng quanh của tập n phần tử
	=	$(n-1)!$
H_r^n	=	C_{r+n-1}^r
$C_n^{n_1, n_2, ..., n_m}$	=	$\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_m!}$
MO	:	Olympic Toán học
IMO	:	Olympic Toán Quốc tế
$APMO$	:	Olympic Toán Châu Á Thái Bình Dương
VMO	:	Olympic Toán Việt Nam

Mở đầu

Trong quá trình giảng dạy Toán THPT, tôi nhận thấy rằng đối với đa số học sinh, việc tiếp thu kiến thức chương Tổ hợp - Xác suất là rất khó khăn. Đây là phần kiến thức khó trong chương trình sách giáo khoa. Chủ yếu các kiến thức chuyên sâu về tổ hợp tập trung ở chương trình bậc Cao đẳng - Đại học, nên đó cũng là một khó khăn cho các thầy cô giáo giảng dạy Toán THPT trong việc áp dụng phương pháp giảng dạy cho phù hợp. Về các quy tắc đếm, cũng như hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và Nhị thức Newton xuất hiện trong Sách giáo khoa lớp 11. Dựa vào khai triển nhị thức Newton giúp chúng ta khai triển các lũy thừa bậc cao. Đối với học sinh giỏi và học sinh ôn thi THPT Quốc gia, thì ngoài những tính chất cơ bản của khai triển thì các tính chất mở rộng của các hệ số nhị thức cũng như đa thức là một chủ đề thú vị và các bài toán về chủ đề đó thường được xuất hiện trong đề thi học sinh giỏi các cấp, cũng như có thể có trong đề thi THPT Quốc gia. Nhằm hệ thống một cách chặt chẽ các phần kiến thức liên quan nói trên, chúng tôi chọn đề tài:

“Về hệ số nhị thức, hệ số đa thức và một số bài toán liên quan.”

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung chính của luận văn được trình bày trong 3 chương:

Chương 1. Một số kiến thức về giải tích tổ hợp. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích tổ hợp: Hai quy tắc đếm cơ bản, về hoán vị và hoán vị xoay vòng, về tổ hợp và một số ví dụ minh họa.

Chương 2. Về hệ số nhị thức và hệ số đa thức. Chương này trình bày về định lý hệ số nhị thức, một số đẳng thức về tổ hợp, tam giác Pascal, đẳng thức Chu Shih-Chieh, về một số tính chất của hệ số nhị thức, về hệ số đa thức và định lý hệ số đa thức, về tổng của các hệ số nhị thức đều nhau, về quỹ đạo tiệm cận của các hệ số nhị thức.

Chương 3. Một số bài toán áp dụng. Chương 3 trình bày hệ thống các bài toán sơ cấp liên quan đến hệ số nhị thức, hệ số đa thức và một số bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi.

Để hoàn thành bản luận văn này, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Trần Xuân Quý, người thầy nhiệt huyết đã truyền thụ kiến thức, đã chỉ ra hướng đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình làm luận văn. Đồng thời, tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn. Qua đây, tôi cũng gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu Trường THPT Yên Phong số 1 và các thầy cô giáo trong Tổ Toán của nhà trường, nơi tôi đang công tác, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong công tác và giảng dạy để tôi được tập trung hoàn thành chương trình học, cũng như bản luận văn.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đặc biệt là người vợ của tôi, cũng như các con tôi đã luôn động viên, giúp đỡ và là nguồn động lực cho tôi trong quá trình học, cũng như hoàn thiện bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 4 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Bá Nam

Chương 1

Một số kiến thức về giải tích tổ hợp

Trong chương này, chúng tôi trình bày về hai quy tắc đếm cơ bản, về hoán vị và hoán vị xoay vòng, về tổ hợp và một số ví dụ liên quan. Nội dung cụ thể được trình bày trong các mục sau:

1.1 Hai quy tắc đếm cơ bản

Trong cuộc sống hàng ngày, chúng ta thường gặp các tình huống cần đếm hoặc liệt kê "sự kiện" như: sắp xếp các vật theo một cách nào đó, phân chia các vật trong một điều kiện nhất định, phân phối các vật dụng theo một đặc điểm nhất định, ... Ví dụ, chúng ta có thể gặp bài toán đếm các loại sau: "Có bao nhiêu cách để sắp xếp 5 chàng trai và 3 cô gái thành một hàng sao cho không có hai cô gái nào ngồi cạnh nhau?", "Có bao nhiêu cách để chia một nhóm 10 người thành ba nhóm bao nhỏ gồm tương ứng 5, 3 và 2 người mỗi nhóm?". Đây là hai ví dụ rất đơn giản về "hoán vị" và "tổ hợp". Trước khi chúng ta tìm hiểu về hoán vị và tổ hợp, chúng ta nêu lên hai quy tắc cơ bản về phép đếm.

1.1.1 Quy tắc cộng

Nội dung quy tắc cộng: Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1, m_2 cách chọn đối tượng a_2,..., m_n cách chọn đối tượng a_n, trong đó cách chọn đối tượng $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ không phụ thuộc vào bất kỳ cách chọn đối tượng a_j nào

$(1 \leq i \leq n,\ i \neq j)$, thì sẽ có $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ cách chọn đối tượng a_1, hoặc a_2,..., hoặc a_n.

Quy tắc cộng theo ngôn ngữ tập hợp được phát biểu như sau:

Cho n tập hợp $A_k\,(1 \leq k \leq n)$ với $|A_k| = m_k$ và $\forall i,\, j\ (1 \leq i,\, j \leq n)$ $A_i \cap A_j\ \neq \emptyset$, khi $i \neq j$. Khi đó, số cách chọn a_1, hoặc a_2,..., hoặc a_n sẽ bằng số cách chọn các phần tử a thuộc $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ và bằng $\left|\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |A_k|$.

Ví dụ 1.1.1. (Tài liệu [2], trang 2). Có thể đi từ thành phố A đến thành phố B bằng đường thủy, đường hàng không và đường bộ. Giả sử có 2 cách đi bằng đường thủy, 3 cách đi bằng đường hàng không và 2 cách đi bằng đường bộ. Khi đó, theo quy tắc cộng, tổng số các đường đi từ A đến B bằng đường thủy, đường hàng không hoặc đường là bộ là $2 + 3 + 2 = 7$.

Ví dụ 1.1.2. (Tài liệu [2], trang 2). Tìm số các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 + y^2 \leq 5.$$

Lời giải: Ta có thể chia làm 6 trường hợp:

$$x^2 + y^2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Với $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, ta đặt

$$S_i = \left\{(x; y)\,|x, y \in Z,\ x^2 + y^2 = i\right\}$$

Khi đó, ta có

$S_0 = \{(0; 0)\}$.
$S_1 = \{(1; 0),\ (-1; 0),\ (0; 1),\ (0; -1)\}$.
$S_2 = \{(1,\ 1),\ (-1;\ -1),\ (1;\ -1),\ (-1;\ 1)\}$.
$S_3 = \emptyset$.
$S_4 = \{(2,\ 0),\ (-2;\ 0),\ (0;\ 2),\ (0;\ -2)\}$.
$S_5 = \{(2,\ 1),\ (-2;\ -1),\ (2;\ -1),\ (-2;\ 1),\ (1;\ 2),\ (-1;\ -2),\ (1;\ -2),\ (-1;\ 2)\}$.

Vậy, theo quy tắc cộng, tổng số cặp $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là:

$$\sum_{i=1}^{5} |S_i| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21.$$

Ví dụ 1.1.3. (Tài liệu [1], trang 12). Với các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và trong mỗi số phải nhất thiết có mặt chữ số 1?

Lời giải: Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$. Vì trong $\overline{abcd}$ nhất thiết phải có mặt chữ số 1, nên ta xét các tập A_1, A_2, A_3, A_4 là tập các số dạng $\overline{1bcd}, \overline{a1cd}, \overline{ab1d}, \overline{abc1}$ tương ứng.

1. Xét A_1 khi lập số $\overline{1bcd}$, b có 6 cách chọn từ các chữ số 0, 2, 3, 4, 5, 6; c có 5 cách chọn từ các chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{b\}$; d có 4 cách chọn từ các chữ số của tập $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{b, c\}$. Do đó, số cách lập các số dạng $\overline{1bcd}$ là $6.5.4 = 120$ hay $|A_1|$=120.

2. Xét A_2, A_3, A_4.

   - Xét A_2. Chữ số a đứng đầu của số $\overline{a1cd}$, nên nó không được là chữ số 0, nên a chỉ có thể chọn từ 1 trong 5 chữ số 2, 3, 4, 5, 6; c có 5 cách chọn từ các chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a\}$; d có 4 cách chọn từ các chữ số của tập $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a, c\}$. Do đó, số cách lập các số dạng $\overline{a1cd}$ là $5.5.4 = 100$ hay $|A_2|$=100. Lập luận tương tự, ta cũng có $|A_3| = |A_4| = 100$.
   - Vì các số thuộc các dạng khác nhau đều khác nhau, nên với mọi i, j với $(1 \le i, j \le 4), i \ne j$, ta đều có $A_i \cap A_j = \emptyset$. Do đó, số các số cần tìm được tính theo quy tắc cộng, ta có

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 120 + 100 + 100 + 100 = 420.$$

1.1.2 Quy tắc nhân

Nội dung quy tắc nhân: Cho n đối tượng a_1, a_2,..., a_n. Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1 và với mỗi cách chọn a_1 có m_2 cách chọn đối tượng a_2, sau đó với mỗi cách chọn a_1, a_2 có m_3 cách chọn a_3,.... Cuối cùng với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_{n-1} có m_n, cách chọn đối tượng a_n. Như vậy sẽ có $m_1.m_2.....m_{n-1}.m_n$ cách chọn các đối tượng a_1, rồi a_2, rồi a_3,..., rồi a_n.

Quy tắc nhân theo ngôn ngữ tập hợp được phát biểu như sau:

Cho n tập hợp $A_k\,(1 \le k \le n)$ với $|A_k| = m_k$. Khi đó, số cách chọn (S) bộ gồm n phần tử $(a_1, a_2, ..., a_n)$, với $a_i \in A_i\,(1 \le i \le n)$ sẽ là

$$S = |A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n = \prod_{k=1}^{n} m_k$$

Ví dụ 1.1.4. (Tài liệu [1], trang 13). Từ thành phố A đến thành phố B có 4 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 4 con đường. Không có con đường nào nối thành phố B và thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D mà phải đi qua thành phố B hoặc thành phố C?

Lời giải: Trước hết ta tìm số con đường đi từ A đến D qua B. Có 4 cách chọn đường đi từ A đến B và có 2 cách chọn đường đi từ B đến D, nên theo quy tắc nhân, số cách chọn đường đi từ A đến D qua B là 4.2=8.

Tương tự, số cách chọn đường đi từ A đến D qua C là 3.4=12.

Vì cách chọn đường đi từ A sang D qua B và cách chọn đường đi từ A sang D qua C không phụ thuộc lẫn nhau, nên theo quy tắc cộng, ta có số con đường để đi từ A sang D là 8+12=20.

Ví dụ 1.1.5 (Tài liệu [2], trang 5)**.** Tìm số các ước số dương của số 600 (kể cả 1 và chính nó).

Lời giải: Trước hết, ta thấy rằng số 600 có sự phân tích thành tích duy nhất qua các thừa số nguyên tố, đó là

$$600 = 2^3.3^1.5^2.$$

Do đó, một số nguyên dương m là ước của 600 khi và chỉ khi m có dạng $m = 2^a.3^b.5^c$, với $a, b, c \in Z$ sao cho $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 2$.
Vậy, số các ước số dương của 600 là số cách để tạo thành bộ ba (a, b, c), với $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $b \in \{0,\ 1\}$, $c \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Khi đó, theo quy tắc nhân, ta có tất cả 4x2x3=24 ước số dương của số 600.

Nhận xét 1.1.6. Bằng cách áp dụng quy tắc nhân một cách tương tự, ta có được kết quả tổng quát sau đây:
Nếu một số tự nhiên n có sự phân tích thành các thừa số nguyên tố dạng $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$, trong đó, p_i là các số nguyên tố phân biệt và k_i là các số nguyên, thì số các ước số dương của n bằng $\prod\limits_{i=1}^{r}(k_i + 1)$.

Trong các ví dụ trên, chúng ta đã thấy các quy tắc cộng và nhân được sử dụng riêng biệt để giải quyết một số bài toán đếm. Hiển nhiên, việc giải quyết một bài toán phức tạp hơn có thể cần áp dụng đồng thời cả hai quy tắc cộng và quy tắc nhân. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.1.7. (Tài liệu [2], trang 5). Cho tập $X = \{1,\ 2,\ ...,\ 100\}$. Đặt

$$S = \{(a;\, b, c)\,|a,\ b,\ c \in X,\ a < b,\ a < c\}.$$